Analízis 3.

1. előadás

A jegyzetet *Lanka Máté* készítette *dr. Weisz Ferenc* előadásán.
Tantárgyi honlap:
Előadás ideje: 2018. 02. 12. 13:00-14:00.

Megjegyzés: A jegyzet nem 100%-os, hibák és elütések előfordulhatnak, ezek jelzését köszönöm.

Technikai információk:

- Előadás és gyakorlat látogatása kötelező, max 3 hiányzás.
- Csak 1 jegyet lehet kapni.
- A rendszeres számonkérés megmarad
    - 10 alkalommal 10 perces ZH
    - Két definíció, vagy tétel és egy gyakorlati
    - Igy 40 pont;
    - Az első és második 5 részből is 5-5 pont kell;
    - Sikeres, ha összesen 16 pont kell;
    - Akinek ez nem sikerül, annak UV-znia kell.
    - Ha megvan, akkor két ZH-t kell írni, ahol csak gyakorlati feladatok lesznek.
    - Ha mindkettő sikerült (40-ből 10 pont), akkor megvan a jegy;
    - Lesz pótZH is.
- Nem megengedett eszközt továbbra se lehet használni (logikus végülis).
- Bizonyitások nem lesznek számonkérve.

Többváltozós analízis

Mi az, ami eddig volt? Eddig vettünk sorozatokat, azok határértékeit, ezzel kezdtük még Analízis 1.-ből. Ezt követte függvény határértéke, majd már Analízis 2.-ből függvények folytonosságával, és függvények deriváltjával foglalkoztunk, a legvégén pedig a függvények integráltjával. Ezek mind $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voltak, ez ebben a félévben már $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ „alakban" lesz. A különbség leginkább a deriváltas definíciókhoz képest lesz, mert míg eddig $f'(x)$ egy szám volt, ez már egy mátrix lesz.

Emlékeztetőnek jöjjön egy

Definíció.

$(a_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, ha $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0\colon |a_n - \alpha| < \epsilon$.

Ez az $|a_n - \alpha|$ egy távolságot fog megadni.

Például $\mathbb{R}^2\colon \rho(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$, ahol $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, azaz van x és y vektorom, amelyeknek vannak távolságai, amelyet az előbbi képlet ad meg.

Ebből mi a lényeg? Milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a ρ?

- $\rho(x,y) \geq 0$
- $\rho(x,y) = 0$, ha $x = y$.
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ szimmetrikus.
- $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, ahol $x,y,z \in \mathbb{R}^2$.

Ezek a fontosak, ha mind a négy igaz, akkor definiálva van egy távolság. Vannak más tulajdonságai is, de minket csak ez a négy érdekel.

Definíció.

Az (M, ρ) metrikus tér, ha $M \neq \emptyset, \rho: M\ x\ M \to \mathbb{R}$, és igazak a következő tulajdonságok:

- $\rho(x, y) \geq 0$
- $\rho(x, y) = 0$ akkor, ha $x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ szimmetrikus.
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, ahol $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

Megjegyzés: Ezek ugyanazok a tulajdonságok, mint előbb.

Ekkor ρ-t metrikának vagy távolságnak nevezzük, $\rho(x, y)$ pedig x és y távolsága.

Általános metrikus terekkel nem sokat fogunk foglalkozni a félév folyamán.

Ahhoz, hogy metrikus teret definiáljunk, nem kell, hogy kivonás, összeadás legyen értelmezve. Akár vehetjük azt is, hogy két hallgató 1 távolságra van, ha a két hallgató különböző (ha a két hallgató ugyanaz, akkor 0).

Legyen

$$M \coloneqq \mathbb{R}^n, \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}\text{, ahol } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

TÉTEL.

$(\mathbb{R}^N, \rho)$ metrikus tér.

BIZONYÍTÁS.

i)

$\rho(x, y) \geq 0$

ii)

$\rho(x, y) = 0$

Ez esetben $x = y$.

iii)

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$

Ez nyilvánvalóan igaz.

iv)

$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Mit jelent ez? Azt jelenti, hogy

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2}$$

Ebből nevezzük el a jobb oldalon: $|x_i - z_i| \coloneqq a_i, |z_i - y_i| \coloneqq b_i$. Ha ezt a kettőt összeadom, a kettő z_i kiesik, és megkapjuk azt, hogy

$$\sqrt{\sum a_i + \sum b_i + 2\sum a_i b_i} \leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$$

$$\sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum a_i b_i \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$$

A kieső tagok után megkapjuk, hogy:

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}. \blacksquare$$

<u>Megjegyzés:</u> A szummáknál $i = 1$-től n-ig tart mindegyik.

Ebből következik a következő

<u>Lemma.</u>

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n: |\sum a_i, b_i| \leq \left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ebből következik az, hogy

$b_i = 0, i = 1, \dots, n,$ vagy $\exists \alpha \in \mathbb{R}: a_i = \lambda i, i = 1, \dots, n$

BIZONYÍTÁS.

$$0 \leq P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda b_i)^2 = \sum a_i^2 - 2\lambda\sum a_i b_i + \lambda^2 \sum b_i^2$$

Ekkor

- $\sum b_i^2 = 0$
- $\sum b_i^2 > 0$
  - $D = 4(\sum a_i b_i)^2 - 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) \leq 0$
  - $(\sum a_i b_i)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$
  - $|\sum a_i b_i| \leq \left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  - Ez esetben csak akkor van egyenlőség, ha
  - $D = 0,$ azaz $\exists \lambda: P(\alpha) = 0,$ azaz $\exists \lambda \backslash in \mathbb{R}: a_i = \lambda b_i, i = 1, \dots, n. \blacksquare$