Analízis 3.

2. előadás

A jegyzetet *Lanka Máté* készítette *dr. Weisz Ferenc* előadásán.
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~weisz/
Előadás ideje: 2018. 02. 19. 13:00-14:00.

A **normált terek**kel fogunk foglalkozni.

Motiváció

Előző előadáson meg tudtuk mondani két pont távolságát $\mathbb{R}^2$-en. Ez mellett létezik még a hossz is, ahol $x \in \mathbb{R}^2$: $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Ez azt jelenti, hogy ha van egy x pontom, amelyeknek ezek a koordinátái, akkor az x_1 az origótól az x tengelyen vett távolsága, míg az x_2 az y tengelyen. Ezáltal Pitagorasz-tétel.

Mik ezeknek a tulajdonságai?

- $\|x\| > 0$;
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 = (0,0)$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Mindezeknél $x, y \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Az utolsó pedig maga a háromszög-egyenlőtlenség.

Definíció.

$(X, \|.\|)$ normált tér, ha

1. X lineáris tér $\mathbb{R}$ felett;
2. $\|.\|: x \to \mathbb{R}$ a következő tulajdonságokkal:
   a. $\|x\| \geq 0$;
   b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
   c. $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\|$;
   d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R})$.

Ekkor a $\|.\|$ függvényt normának, vagy hossznak nevezzük.

Állítás.

Ha $(X, \|.\|)$ normált tér, akkor $\rho(x, y) = \|x - y\|$ metrika X-en.

Ezután legyen $X = \mathbb{R}^n$ és $\|x\| = \|x\|_2 = (\sum |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, ahol $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Megjegyzés. A normához most kiírtuk a kettest, az egyszerűség kedvéért tettük ki.

TÉTEL.

$(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ egy normált tér.

BIZONYÍTÁS.

Lásd múlt héten, hasonlóan kell csinálni.

Megjegyzés. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ a múlt heti metrika.

Definíció.

$K_R(a) \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left||x-a|\right| < R\right\}$ az a-középű (-körüli) R-sugarú környezet, vagy a-középű R-sugarú nyílt gömb.

Nézzünk erre példát.

$n = 2, a = 0, R = 1$: Ebben az esetben

$$K_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left||x-0|\right| < R\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R\right\}$$

Ez nem más, mint az origó középpontú R sugarú gömb.

Definíció.

$H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, ha $\exists R > 0 : H \subset K_R(0)$.

Definíció.

Az (a_k): $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 : \left||a_k - \alpha|\right| < \epsilon$.

Jelölése: $\alpha = \lim a_k$.

TÉTEL.

Legyen $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat. A következők ekvivalensek:

1. (a_k) konvergens;
2. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0\ \exists k_0, \forall k \geq k_0 : a_k \in K_\epsilon(\alpha)$;
3. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n : \lim\left||a_k - \alpha|\right| = 0$.

TÉTEL.

Legyen $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens és $\lim a_k = \alpha$. Ekkor

1. α egyértelmű;
2. (a_k) korlátos;
3. ha $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (azaz $\mu \uparrow$), akkor $\left(a_{\mu_k}\right)$ konvergens és $\lim a_{\mu_k} = \alpha$.

TÉTEL. (Műveletek)

Legyen $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, és $(b_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozatok konvergensek, $\lim a_k = \alpha, \lim b_k = \beta$. Ekkor

1. $(a_k + b_k)$ is konvergens és $\lim(a_k + b_k) = \alpha + \beta$;
2. (λa_k) is konvergens, és $\lim \lambda a_k = \lambda\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.