Analízis 3.

Elméleti kérdések a gyakorlati röpZH-khoz

A kidolgozást *Lanka Máté* készítette *dr. Weisz Ferenc* előadásai, és *Bauer Bence* Analízis 2. előadásokon készült jegyzetei alapján. Utoljára szerkesztve: 2018. 03. 19. 15:41.

1) Definiálja a primitív függvényt.

Válasz. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$.

Az $F: I \to \mathbb{R}$ függvény az f primitív függvénye, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$, ha $\forall x \in I$.

2) Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek nincs primitív függvénye.

Válasz. $f(x) = sign(x)$.

3) Definiálja az egy adott pontban eltűnő primitív függvény fogalmát.

Válasz. $\int_{x_0} f$ jelöli az az egyetlen F primitív függvényt, amelyre $F(x_0) = 0$.

4) A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel.

Válasz. Ha I intervallum, és $f: I \to \mathbb{R}$ függvénynek $\exists$ primitív függvénye, akkor f Darboux tulajdonságú.

5. Milyen elégséges feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz.

6. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Válasz. Ha az $f: I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye F, akkor legyen: $\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ neve határozatlan integrál.

7. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha $f, g: I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye, és $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

8. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?

Válasz. A $\sum \alpha_n (x-a)^n, x \in K_R(a), R > 0$ hatványsor primití függvénye:

$$\sum_{n=0} \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + c\,, x \in K_R(a).$$

9. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás tétele?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f, g: I \to \mathbb{R}, f, g \in D(I)$. Ha $\exists f'g$ primitív függvénye és

$$\int f * g' = f * g - \int f' * g, \text{és} \int_{x_0} f * g' = f * g - f(x_0)g(x_0) - \int_{(x_0)} f' * g$$

akkor $\exists f g'$ primitív függvénye.

10. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos első helyettesítési szabály?

Válasz. $g: I \to J, g \in D(I), f: J \to \mathbb{R}, I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ha $\exists f$-nek primitív függvénye, akkor $\int f \; o \; g * g' = \left(\int f\right) o \; g$ és

$$\int_{t_0} f \; o \; g * g' = \left(\int_{(g(t_0))} f\right) o \; g.$$

11. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabályt.

Válasz. Tegyük fel, hogy , $f: I \to \mathbb{R}, g: J \to I$ bijekció, $g \in D(J), g'(x) \neq 0, x \in I$.
Ha $\exists f \; o \; g * g': J \to \mathbb{R}$ primitív függvény, ekkor:

$$\int f = \left(\int f \; o \; g * g'\right) o \; g^{-1} \text{ és } \int_{x_0} f = \left(\int_{x_0} f \; o \; g * g'\right) o \; g^{-1}.$$

12. Adjon meg legalább három olyan függvényt, amelyiknek a primitív függvénye nem elemi függvény.

Válasz. $\int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{\cos x}{x} dx; \int e^{-x^2} dx.$

13. Definiálja az intervallum egy felosztását

Válasz. A $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ halmaz egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, ha
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Jelölés: $\tau \in F[a, b]$.

14. Mit jelent egy felosztás finomítása?

Válasz. τ_2 finomabb felbontás, mint τ_1, ha $\tau_2 \supset \tau_1$.

15. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

Válasz. $f \in K[a, b], \tau \in F[a, b]$

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f * (x_i - x_{i-1}).$$

16. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Válasz. $f \in K[a, b], \tau \in F[a, b]$

$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f * (x_i - x_{i-1}).$$

17. Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Válasz. $f \in K[a, b], \tau_1, \tau_2 \in F[a, b]$, ekkor ha $\tau_2 \supset \tau_1$, akkor $s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2)$.

18. Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Válasz. $f \in K[a, b], \tau_1, \tau_2 \in F[a, b]$, ekkor ha $\tau_2 \supset \tau_1$, akkor $S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2)$.

19. Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?

Válasz. $f \in K[a, b], \tau_1, \tau_2 \in F[a, b]$, ekkor $s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2)$.

20. Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?

Válasz. $f \in K[a, b]. I_* f := \sup_{\tau \in F[a, b]} s(f, \tau).$

21. Mi a Darboux-féle felső integrál definíciója?

Válasz. $f \in K[a,b]. I^*f := \underset{\tau \in F[a,b]}{inf} S(f,\tau)$.

22. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

Válasz. $f \in K[a,b]$ függvény Riemann integrálható, ha $I_*f = I^*f$.

23. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-) integrálját?

Válasz.

$$I_*f = I^*f = If = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

24. Adjon meg egy példát nem integrálható függvényre.

Válasz. $x \in [0,1]$.

$$f(x) := \begin{cases} 1, \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

25. Mi az oszcillációs összeg definíciója?

Válasz. $\Omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$

26. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

Válasz. $f \in R[a,b], \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \tau \in F[a,b]: \Omega(f,\tau) < \epsilon$.

27. Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalens átfogalmazását.

Válasz.

$$f \in R[a,b], \text{és } \int_a^b f = I \Leftrightarrow \exists \tau_n: \lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I.$$

28. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?

Válasz.

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor $f + g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

29. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?

Válasz.

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor: $f * g \in R[a,b]$.

30. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

Válasz.

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor ha $|g(x)| \geq m > 0 \ \forall x \in [a,b]$, akkor $\frac{f}{g} \in R[a,b]$.

31. Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

Válasz.

$f \in R[A,B], a,b,c \in [A,B]$. Ekkor $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

32. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Ha $f \in C[a,b]$, ekkor $f \in R[a,b]$.

33. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, ekkor $f \in R[a,b]$.

34. Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény megváltoztatását illetően?

Válasz. $f$értékeit véges sok pontban megváltoztatom ($\tilde{f}$).

35. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

Válasz. Ha $f, g \in R[a,b]$ és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

36. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolútértékéről integrálhatóság szempontjából?

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$, és $-|\int f| \leq |\int f| \leq \int |f|$.

37. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b], g \geq 0, m := \inf f$ és $M := \sup f$. Ekkor:

$$m * \int_a^b g \leq \int_a^b f * g \leq M * \int_a^b g$$

38. Mi az integrálszámítás második középértéktétele?

Válasz. Tegyük fel, hogy $g \in R[a,b], g \geq 0, f \in C[a,b]$, ekkor:

$$\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f * g = f(\xi) * \int_a^b g$$

39. Hogyan szól a Newton-Leibniz-tétel?

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek $\exists F$ primitív függvénye, akkor:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

40. Definiálja az integrálfüggvényt.

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$, akkor:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f \ \ (x \in [a,b])$$

az f integrál függvénye.

41. Fogalmazza meg a differenciál- és integrálszámítás alaptételét.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b], x_0 \in [a,b], F(x) = \int_{x_0}^{x} f \ \ (x \in [a,b])$, ekkor:

1. $F \in C[a,b]$;
2. ha $f \in C(d)$, akkor $F \in D(d)$ és $F'(d) = f(d)\ (d \in [a,b])$.

42. Mit ért parciális integráláson a Riemann-integrálokkal kapcsolatban?

Válasz. Ha $f, g \in D[a,b]$ és $f', g' \in R[a,b]$, akkor

$$\int_a^b f' * g = f(b) * g(b) - f(a) * g(a) - \int_a^b f * g'$$

43. Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra vonatkozóan?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b], g: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ differenciálható bijekció, és $g' \neq 0$, ekkor:

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f\ o\ g * g'$$

44. Definiálja a metrikus teret.

Válasz. Az (M, ρ) metrikus tér, ha $M \neq \emptyset, \rho: M\ x\ M \to \mathbb{R}$, és igazak a következő tulajdonságok:

- $\rho(x,y) \geq 0$
- $\rho(x,y) = 0$ akkor, ha $x = y$
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ szimmetrikus.
- $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, ahol $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

45. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli halmaz korlátos?

Válasz. $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, ha $\exists R > 0: H \subset K_R(0)$.

46. Definiálja az $(\boldsymbol{X}, \|\,.\,\|)$ normált térben a konvergens sorozat fogalmát.

Válasz. Az $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0: \left||a_k - \alpha|\right| < \epsilon$$

<u>Jelölése:</u> $\alpha = \lim a_k$.

47. Fogalmazza meg normált térbeli konvergens sorozatok alaptulajdonságait.

Válasz. Legyen $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens és $\lim a_k = \alpha$. Ekkor

1. α egyértelmű;
2. (a_k) korlátos;
3. ha $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (azaz $\mu \uparrow$), akkor $\left(a_{\mu_k}\right)$ konvergens és $\lim a_{\mu_k} = \alpha$.

48. Mit jelent az, hogy két norma ekvivalens?

Válasz. Az $\left||.|\right|_1$ és $\left||.|\right|_2$ normák ekvivalensek $\left(\left||.|\right|_1 \sim \left||.|\right|_2\right)$, ha

$$\exists m < M: m\left||x|\right|_1 \leq \left||x|\right|_2 \leq M\left||x|\right|_1 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

49. Milyen állítást ismer az $\mathbb{R}^n$-beli normák ekvivalenciájáról?

Válasz.

- $||.||_1 \sim ||.||_2 \sim ||.||_\infty \sim ||.||_p \quad (1 \leq p \leq +\infty)$;
- $\mathbb{R}^n$-ben bármely két norma ekvivalens.

50. Hogyan jellemezhető $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciája a koordinátasorozatokkal?

Válasz. $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, a_k = \left(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}\right)$. Ekkor (a_k) konvergens,

$$\lim a_k = \alpha = \left(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}\right) \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n: \lim a_k^{(i)} = \alpha^{(i)}$$

Megjegyzés: A felső indexben a zárójelben lévő számokkal koordinátákat jelöltünk.

51. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli sorozat Cauchy-sorozat?

Válasz. $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Cauchy-sorozat, ha $\forall \epsilon > 0, \exists k_0, \forall k, l \geq k_0: \left|\left|a_k - a_l\right|\right| < \epsilon$.

52. Milyen kapcsolat van normált térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok között?

Válasz. Legyen $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat. Ha

1. (a_n) konvergens $\Rightarrow$ Cauchy-sorozat;
2. (a_n) Cauchy-sorozat $\not\Rightarrow$ (a_n) konvergens.

53. Írja le a Banach-tér definícióját.

Válasz. $\mathbb{R}^n$ Banach-tér, ha $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergens $\Leftrightarrow$ (a_k) Cauchy-sorozat.

54. Fogalmazza meg $\mathbb{R}^n$-ben a Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Válasz. $n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^n$ normált tér (tetszőleges $||.||$ normával).
Ekkor ha $(a_k) \subset \mathbb{R}^n$ konvergens $\Leftrightarrow$ (a_k) Cauchy-sorozat, azaz R^n Banach-tér.

55. Mit állít $\mathbb{R}^n$-ben a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?

Válasz. Ha $(a_k): \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ korlátos sorozat, akkor $\exists (a_k) \circ \mu = \left(a_{\mu_k}\right)$ konvergens részsorozat.

56. Definiálja normált terek közötti leképezések pontbeli folyonosságát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists > 0, \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f: f(x) \in K_\epsilon\big(f(a)\big)$$

Jele: $f \in C(a)$

57. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_k): \mathbb{N} \to D_f, \lim x_k = a: \lim f(x_k) = f(a)$.

58. Milyen tételt ismer $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-típusú függvények folytonosságáról?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha
$\forall \epsilon > 0 \ \exists > 0, \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f: f(x) \in K_\epsilon\big(f(a)\big)$.

Jele: $f \in C(a)$.

59. Fogalmazza meg Weierstrass abszolút szélsőértékekre vonatkozó tételét!

Válasz. Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos és D_f korlátos és zárt, akkor $\exists \max f$ és $\min f$.

60. Definiálja normált térben a torlódási pont fogalmát.

Válasz. $a \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ torlódási pontja, ha $\forall K(a)$-ra: $K(a) \cap A$ végtelen.

<u>Jelölése:</u> A'.

61. Írja le normált terek közötti leképezésekre a határérték definícióját.

Válasz.

62. Fogalmazza meg a határértékre vonatkozó átviteli elvet.

Válasz.

63. Definiálja $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény parciális deriváltját.

Válasz.

64. Mi az iránymenti derivált fogalma?

Válasz.

65. Milyen tételt ismer az iránymenti derivált kiszámolására?

Válasz.

66. Írja le az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény totális deriválhatóságának a definícióját.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény deriválható az $a \in int\ D_f$ pontban, ha $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - L(h)||}{||h||} = 0$$

Ekkor $f'(a) = L$. Jelölése: $f \in D(a)$.

67. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra?

Válasz. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in int\ D_f: f \in D(a) \Leftrightarrow \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \exists \epsilon: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_{0} \epsilon = 0$ és $f(a+h) - f(a) = L(h) + \epsilon(h) * ||h||$.

68. Milyen tételt ismer a deriváltmátrix előállítására?

Válasz.

69. Milyen kapcsolat van a pontbeli deriválhatóság és folytonosság között?

Válasz.

70. Fogalmazza meg a láncszabályt.

Válasz.

71. A deriválhatóság és a koordinátafüggvények deriválhatósága közötti kapcsolat.

Válasz.

72. A totális- és a parciális derivált közötti kapcsolat.

Válasz.

73. Milyen elégséges feltételt ismer a totális deriválhatóságra a parciális deriváltakkal?

Válasz.

74. A totális- és az iránymenti derivált közötti kapcsolat.

Válasz.

75. Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt.

Válasz.

76. Mit jelent az, hogy egy függvény kétszer deriválható egy pontban?

Válasz.

77. Definiálja a Hesse-féle mátrixot.

Válasz.

78. Mit jelent az, hogy egy függvény $(s + 1)$-szer deriválható egy pontban?

Válasz.

79. Fogalmazza meg a Young-tételt.

Válasz.

80. Adja meg a Taylor-polinom definícióját.

Válasz.

81. Milyen képletet ismer az elsőfokú, n-változós Taylor-polinomra?

Válasz.

82. Milyen képletet ismer a másodfokú, n-változós Taylor-polinomra?

Válasz.

83. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal.

Válasz.

84. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Peano-féle maradéktaggal.

Válasz.

85. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Peano-féle maradéktaggal másodfokú Taylor-polinomokra.

Válasz.

86. Adja meg a kvadratikus alak definícióját.

Válasz.

87. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak

Válasz.

pozitív definit legyen? (Sylvester-kritérium.)

Válasz.

88. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak

Válasz.

negatív definit legyen? (Sylvester-kritérium.)

Válasz.

89. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt.

Válasz.

90. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű elégséges feltételt.

Válasz.

91. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű szükséges feltételt.

Válasz.